

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ

Досліджено вплив історії та швидкості навантаження на величину критичної товщини прямокутної пружно-в'язкопластичної пластинки, механічні властивості матеріалу якої описуються теорією повзучості, що враховує мікронапруження.

INVESTIGATION OF LOADING HISTORY INFLUENCE ON THE STABILITY OF ELASTIC-VISCOPLASTIC PLATE

The influence of loading history and loading rate on the value of critical thickness of elastic-viscoplastic plate is investigated, mechanical properties of the material, which it's made of, are described by the creep theory, taking into account the microstresses.

Постановка задачи устойчивости тонких пластин. Рассмотрим тонкую пластинку со сторонами a , b , толщиной h , срединная плоскость которой совпадает с плоскостью Ox_1x_2 (рис. 1).

Будем полагать, что внешние нагрузки, которые могут изменяться во времени, действуют в срединной плоскости пластинки так, что $\sigma_{13}^0 = \sigma_{23}^0 = \sigma_{33}^0 = 0$. Предположим также, что в ней до точки бифуркации процесса деформирования реализуется однородное по толщине напряженное состояние, определяемое функциями $\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(t)$, $\sigma_{22}^0 = \sigma_{22}^0(t)$, $\sigma_{12}^0 = \sigma_{12}^0(t)$.

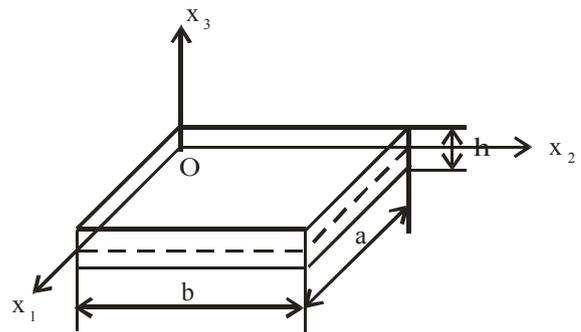


Рис. 1 – Расчетная схема

Нахождение точек бифуркации процесса деформирования тонких пластин сводится к вариационной задаче [1-4]

$$\delta H_c = \delta \int_S F(x_1, x_2, \tilde{u}_\alpha, \tilde{u}_{\alpha,\beta}, \tilde{w}_{,\beta\gamma}) dS = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } F = H_{(3)}^{\alpha\beta\chi\gamma} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} \tilde{\kappa}_{\chi\gamma} + 2H_{(2)}^{\alpha\beta\chi\gamma} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} \tilde{\kappa}_{\chi\gamma} + H_{(1)}^{\alpha\beta\chi\gamma} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} \tilde{\varepsilon}_{\chi\gamma} + N^{\alpha\beta} \tilde{w}_{,\alpha} \tilde{w}_{,\beta}; \quad (2)$$

$$H_{(i)}^{\alpha\beta\chi\gamma} = \int_{-h/2}^{h/2} G^{\alpha\beta\chi\gamma} x_3^{i-1} dx_3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь $\tilde{\kappa}_{\alpha\beta}$ – компоненты деформации изгиба и кручения срединной плоскости, $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора малых деформаций, $G^{\alpha\beta\chi\gamma}$ – компоненты матрицы жесткости упругого тела сравнения.

Эта вариационная задача эквивалентна следующим уравнениям:

$$\frac{h^2}{12} \left(G^{\alpha\beta\chi\gamma} \tilde{w}_{,\alpha\beta} \right)_{,\chi\gamma} - \left(\sigma_{\alpha\beta}^0 \tilde{w}_{,\alpha} \right)_{,\beta} = 0, \quad (3)$$

$$\left(G^{\alpha\beta\chi\gamma} \tilde{u}_{\chi,\gamma} \right)_{,\alpha} = 0. \quad (4)$$

И естественные граничные условия (условия на свободном крае) принимают вид (для края $x_1 = a$):

$$G^{11\chi\gamma} \tilde{u}_{\chi,\gamma} = G^{12\chi\gamma} \tilde{u}_{\chi,\gamma} = G^{11\chi\gamma} \tilde{w}_{,\chi\gamma} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{h^2}{12} \left(G^{1\beta\chi\gamma} \tilde{w}_{,\chi\gamma} \right)_{,\beta} + \left(\sigma_{\chi\gamma} \delta_{\chi\alpha} \tilde{w}_{,\gamma} \right)_{,\alpha} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, задача по определению точек бифуркации процесса деформирования тонких пластин сводится к решению задачи на собственные значения следующего дифференциального уравнения относительно искомой функции \tilde{w} (если докритическое напряженное состояние однородно):

$$\frac{h^2}{12} G^{\alpha\beta\chi\gamma} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\chi \partial x_\gamma} = \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \quad (7)$$

Уравнение (7) необходимо дополнить граничными условиями. Из условия существования нетривиального решения уравнения (7) при заданных нулевых граничных условиях можно определить собственную форму потери устойчивости \tilde{w} и величину критической нагрузки. Примем, что докритическое напряженное состояние рассматриваемой пластинки определяется двумя ненулевыми компонентами тензора напряжений σ_{11} и σ_{22} (имеет место двухосное сжатие). Тогда из уравнения (7) находим

$$\frac{h^2}{12} \left[G_{1111} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x_1^4} + 2(G_{1122} + G_{1212}) \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + G_{2222} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x_2^4} \right] = \sigma_{11} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x_1^2} + \sigma_{22} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x_2^2}. \quad (8)$$

Предположим, что пластинка шарнирно оперта по четырем сторонам, и собственную форму потери устойчивости представим в виде:

$$\tilde{w} = hf \sin(n\pi x_1/a) \sin(m\pi x_2/b), \quad (9)$$

где m, n – число полуволн.

При такой форме представления решения граничные условия будут удовлетворяться тождественно. Подставляя (9) в (8), находим

$$\left(\frac{h}{a} \right)^2 = - \frac{12(n^2 \sigma_{11} + m^2 \alpha^2 \sigma_{22})}{\pi^2 [n^4 G_{1111} + 2(G_{1122} + G_{1212}) n^2 m^2 \alpha^2 + m^4 \alpha^4 G_{2222}]}, \quad (10)$$

где $\alpha = a/b$.

Это уравнение служит для определения критической толщины пластинки при заданной траектории нагружения. Критическое значение толщины определяется как максимальное среди всех, вычисленных для различных m и n .

Пусть $a = b$, то есть пластинка квадратная. Тогда максимальное значение толщины, определяемое по формуле (10), будет достигаться при $m = n = 1$

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 = -\frac{12(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\pi^2 [G_{1111} + 2(G_{1122} + G_{1212}) + G_{2222}]} . \quad (11)$$

Отметим, что $\sigma_{11} < 0$, $\sigma_{22} < 0$, так как имеет место сжатие.

Теперь для того чтобы определить критическую толщину пластинки, нам осталось задать траекторию нагружения и вычислить коэффициенты $G_{\alpha\beta\gamma}$.

Определяющие соотношения теории ползучести. Теория ползучести строится на основе положений [5, 6].

1. Формулируется локальный закон вязкопластического течения для каждой k -й микрочастицы, связывающий микронапряжения ($\sigma^{(k)}$) и микродеформации ($\varepsilon^{(k)}$). Этот закон содержит один или несколько случайных параметров, которые позволяют учесть взаимосвязи между микрочастицами.

2. Совместная функция распределения случайных параметров считается заданной и определяется с учетом экспериментальных данных.

3. Предполагается справедливым обобщенное соотношение Кренера, связывающие отклонения микронапряжений и микродеформаций от их средних значений. Такие соотношения позволяют связать локальные законы вязкопластического деформирования с макроскопическими законами вязкопластического деформирования.

При построении локального закона деформирования k -й микрочастицы, как обычно, тензор скорости микродеформации $\dot{\varepsilon}^{(k)}$ представляется в виде суммы упругой $\dot{\varepsilon}_e^{(k)}$ и пластической $\dot{\varepsilon}_p^{(k)}$ составляющих

$$\dot{\varepsilon}^{(k)} = \dot{\varepsilon}_e^{(k)} + \dot{\varepsilon}_p^{(k)} . \quad (12)$$

Для упругой составляющей скорости микродеформации принимается справедливый закон Гука. При этом считается, что упругая матрица жесткости микрочастицы совпадает с упругой матрицей жесткости представительного макрообъема. Предположив, что пластические деформации не влияют на упругость среды, закон упругости принимаем в следующем виде

$$\dot{\sigma}^{(k)} = \mathbf{G}_e : \dot{\varepsilon}_e^{(k)} , \quad (13)$$

где $\dot{\sigma}^{(k)}$ – тензор скорости изменения микронапряжений;

\mathbf{G}_e – тензор четвертого ранга (матрица упругой жесткости) вида

$$\mathbf{G}_e = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{e} \mathbf{e} \right] , \quad (14)$$

E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона частицы;

\mathbf{E} , \mathbf{e} – единичные тензоры четвертого и второго ранга соответственно.

В качестве локального закона течения используется теория вязкопластичности. Девиатор тензора микронапряжений $s^{(k)}$ представляется в виде суммы диссипативной $\tau^{(k)}$ и «упругой» $\rho^{(k)}$ составляющих сопротивления пластической деформации

$$s^{(k)} = \tau^{(k)} + \rho^{(k)}. \quad (15)$$

Тензор диссипативных сил $\tau^{(k)}$ определяется из закона пластического течения

$$\tau^{(k)} = \tau_k \mu^{(k)}, \quad \mu^{(k)} = \frac{1}{\dot{\lambda}_k} \dot{\varepsilon}_p^{(k)}. \quad (16)$$

Здесь τ_k – локальный предел текучести k -й микрочастицы, $\mu^{(k)}$ – направляющий девиатор $\left(\frac{1}{2} \mu^{(k)} : \mu^{(k)} = 1 \right)$, определяющий направление скорости микропластической деформации k -й микрочастицы; $\dot{\lambda}_k$ $\left(\dot{\lambda}_k = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_p^{(k)} : \dot{\varepsilon}_p^{(k)}} \right)$ – интенсивность скорости микропластической деформации.

Записанные выше соотношения (16) выполняются при активном микропластическом деформировании, которое имеет место, когда

$$\sqrt{\frac{1}{2} \tau^{(k)} : \tau^{(k)}} = \tau_k \text{ и } \dot{\lambda}_k > 0. \quad (17)$$

Если записанное условие не выполняется, то имеет место разгрузка по упругому закону (13).

Пусть локальный предел текучести зависит от скорости

$$\tau_k = \tau_0 + \tau_1 \left(\dot{\lambda}_k / \dot{a} \right)^m. \quad (18)$$

Примем изменение девиатора внутренних микронапряжений k -й микрочастицы в обобщенном виде

$$\dot{\rho}^{(k)} = \begin{cases} R_1 \dot{\lambda}_k + R_2 \langle \dot{\varepsilon}_p \rangle : \mu^{(k)} + R_3 \langle \dot{\lambda} \rangle, & \mu^{(k)} = \mu'^{(k)}; \\ R_2 \langle \dot{\varepsilon}_p \rangle : \mu^{(k)} + R_3 \langle \dot{\lambda} \rangle, & \mu^{(k)} \neq \mu'^{(k)}; \\ R_2 \langle \dot{\varepsilon}_p \rangle : \mu^{(k)} + R_3 \langle \dot{\lambda} \rangle + R_4 \dot{\lambda}_k, & \mu^{(k)} = -\mu'^{(k)}, \end{cases} \quad (19)$$

где $\langle \dot{\lambda} \rangle = \sum_{k=1}^N \dot{\lambda}_k \Delta \nu_k$ с начальными условиями $\rho^{(k)}(0) = 0$; (20)

R_1, R_2, R_3, R_4 – константы материала.

Здесь и в дальнейшем угловые скобки обозначают осреднение по объему. Объем элемента мыслится подразделенным на N областей с отно-

сительной долей объема Δv_k , в пределах которых осредненные деформации равны λ_k . Каждая область состоит из множества микрочастиц, не имеющих друг с другом общей границы, поскольку одинаковые средние пластические деформации возникают одновременно во многих точках рассматриваемого объемного микроэлемента.

Для установления связи локальных законов микропластического и макроскопического деформирования воспользуемся соотношениями Кренера

$$\langle s \rangle - s^{(k)} = A(\varepsilon_p^{(k)} - \langle \varepsilon_p \rangle) \quad (21)$$

или в дифференциальной форме

$$\langle \dot{s} \rangle - \dot{s}^{(k)} = A(\dot{\varepsilon}_p^{(k)} - \langle \dot{\varepsilon}_p \rangle), \quad (22)$$

где A – константа материала.

При известных функции скорости микропластической деформации $\dot{\lambda}_k$ и направлений активного микропластического деформирования $\mu^{(k)}$ скорость макропластической деформации определяется как средняя пластическая деформация всех микрочастиц

$$\langle \dot{\varepsilon}_p \rangle = \sum_{k=1}^N \dot{\lambda}_k \mu^{(k)} \Delta v_k. \quad (23)$$

На основании приведенных формул нетрудно получить разрешающие уравнения теории вязкопластичности, учитывающей микронапряжения.

Построение матрицы жесткости упругого тела сравнения. Запишем соотношения теории ползучести, учитывающей микронапряжения, в виде [1]

$$\langle s \rangle : \mu^{(k)} = \tau_0 + \tau_1 \left(\dot{\lambda}_k / \dot{a} \right)^m + \rho^{(k)} - A \langle \varepsilon_p \rangle : \mu^{(k)} + A \lambda_k. \quad (24)$$

Продифференцируем теперь соотношение (24) по времени с учетом бифуркационного критерия, предложенного в [7], т.е. принимая, что

$$\dot{\lambda}_k = \text{const}. \quad (25)$$

Приходим к уравнению

$$\langle \dot{s} \rangle : \mu^{(k)} = \dot{\rho}^{(k)} - A \langle \dot{\varepsilon}_p \rangle : \mu^{(k)} + A \dot{\lambda}_k. \quad (26)$$

Так как для активных направлений

$$\dot{\rho}^{(k)} = R_1 \dot{\lambda}_k + R_2 \langle \dot{\varepsilon}_p \rangle : \mu^{(k)} + R_3 \langle \dot{\lambda} \rangle,$$

то получаем соотношение

$$\langle \dot{s} \rangle = D_1 \dot{\lambda}_k \mu^{(k)} + D_2 \langle \dot{\varepsilon}_p \rangle + D_3 \langle \dot{\lambda} \rangle \mu^{(k)}, \quad (27)$$

где $D_1 = R_1 + A$, $D_2 = R_2 - A$, $D_3 = R_3$.

Из (27) следует, что

$$\dot{\lambda}_k = \frac{1}{D_1} \dot{\rho} : \mu^{(k)} - \frac{D_3}{D_1} \langle \dot{\lambda} \rangle,$$

где $\dot{r} = \langle \dot{s} \rangle - D_2 \langle \dot{\varepsilon}_p \rangle$.

После осреднения получаем

$$\langle \dot{\lambda} \rangle = \frac{\langle \dot{r} : \mu^{(k)} / D_1 \rangle}{1 + \langle D_3 / D_1 \rangle}.$$

Итак, решение системы (27) имеет вид

$$\dot{\lambda}_k = \frac{1}{D_1} \dot{r} : \mu^{(k)} - \frac{D_3}{D_1(D_1 + D_3\omega)} \langle \dot{r} \rangle : \mu^{(k)}, \quad (28)$$

где $\omega = \int_{\Omega} d\Omega$, Ω – область активных направлений.

Тогда для континуального варианта теории

$$\dot{\varepsilon}_{p\alpha} = \int_{\Omega} \dot{\lambda}(\theta_k) \mu_{\alpha}^{(k)} d\Omega \quad (\alpha=1, 2, \dots, 5),$$

где $\varepsilon_{p\alpha}$ – компоненты вектора деформаций Ильюшина.

Подставляя сюда выражение для $\dot{\lambda}(\theta_k)$ из формулы (28), приходим к соотношению

$$\dot{\varepsilon}_{p\alpha} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{D_1} \mu_{\beta}^{(k)} - \frac{D_3}{D_1 + D_3\omega} F_{\beta} \right) \mu_{\alpha}^{(k)} d\Omega \dot{R}_{\beta} \quad (\alpha=1, 2, \dots, 5)$$

или

$$\dot{\varepsilon}_{p\alpha} = \left(\frac{1}{D_1} G_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{D_3}{D_1 + D_3\omega} F_{\alpha} F_{\beta} \right) \dot{R}_{\beta} \quad (\alpha=1, 2, \dots, 5), \quad (29)$$

где

$$F_{\alpha} = \int_{\Omega} \mu_{\alpha} d\Omega, \quad G_{\alpha\beta}^{(1)} = \int_{\Omega} \mu_{\alpha} \mu_{\beta} d\Omega, \quad \dot{R}_{\beta} = \dot{S}_{\beta} - D_2 \dot{\varepsilon}_{p\beta},$$

S_{β} ($\beta=1, 2, \dots, 5$) – компоненты вектора напряжений Ильюшина.

В развернутом виде последние величины записываются так:

$$\begin{aligned} G_{11}^{(1)} &= 4\pi \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta_1 \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_1 d\theta_2; \\ G_{22}^{(1)} &= 4\pi \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta_2 \sin^5 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_1 d\theta_2; \\ G_{12}^{(1)} &= G_{21}^{(1)} = 4\pi \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin^4 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_1 d\theta_2; \\ G_{33}^{(1)} &= G_{44}^{(1)} = G_{55}^{(1)} = \frac{10\pi}{3} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin^5 \theta_1 \sin^4 \theta_2 d\theta_1 d\theta_2; \\ F_1 &= 4\pi \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta_1 \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_1 d\theta_2; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= 4\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos \theta_2 \sin^4 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 ; \\
F_3 &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta_1 \sin^4 \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 = 0 ; \\
F_4 &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta_1 \sin^3 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \cos \theta_4 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 = 0 ; \\
F_5 &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta_1 \sin^3 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_4 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 = 0 .
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что остальные $G_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$ и $\dot{\Theta}_{p\delta} = 0$ для $\delta = 3, 4, 5$.

Для двухосного сжатия, когда $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$, а остальные $S_\beta = 0$, система (29) принимает вид

$$\begin{cases} a_{11}\dot{\Theta}_{p1} + a_{12}\dot{\Theta}_{p2} = b_{11}\dot{S}_1 + b_{12}\dot{S}_2 ; \\ a_{21}\dot{\Theta}_{p1} + a_{22}\dot{\Theta}_{p2} = b_{21}\dot{S}_1 + b_{22}\dot{S}_2 ; \\ a_{33}\dot{\Theta}_{p3} = b_{33}\dot{S}_3 , \end{cases} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}
b_{11} &= B_1 G_{11}^{(1)} - B_2 F_1^2 , \quad b_{12} = b_{21} = B_1 G_{12}^{(1)} - B_2 F_1 F_2 , \quad b_{22} = B_1 G_{22}^{(1)} - B_2 F_2^2 , \quad b_{33} = B_1 G_{33}^{(1)} , \\
a_{11} &= 1 + D_2 b_{11} , \quad a_{12} = a_{21} = D_2 b_{12} , \quad a_{22} = 1 + D_2 b_{22} , \quad a_{33} = 1 + D_2 b_{33} .
\end{aligned}$$

Учитывая, что компоненты скоростей векторов напряжений и деформаций Ильюшина и тензоров напряжений и деформаций соответственно для несжимаемого материала связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
\dot{S}_1 &= (2\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22})/\sqrt{6} , \quad \dot{S}_2 = \sqrt{2}\dot{\sigma}_{22}/2 , \quad \dot{S}_3 = \sqrt{2}\dot{\sigma}_{12} , \\
\dot{\Theta}_1 &= \sqrt{3/2}\dot{\epsilon}_{11} , \quad \dot{\Theta}_2 = \sqrt{2}(\dot{\epsilon}_{11} + 2\dot{\epsilon}_{22})/2 , \quad \dot{\Theta}_3 = \sqrt{2}\dot{\epsilon}_{12} ,
\end{aligned}$$

получаем систему

$$\begin{cases} c_{11}\dot{\sigma}_{11} + c_{12}\dot{\sigma}_{22} = f_{11}\dot{\epsilon}_{11} + f_{12}\dot{\epsilon}_{22} ; \\ c_{21}\dot{\sigma}_{11} + c_{22}\dot{\sigma}_{22} = f_{21}\dot{\epsilon}_{11} + f_{22}\dot{\epsilon}_{22} ; \\ c_{33}\dot{\sigma}_{12} = f_{33}\dot{\epsilon}_{12} . \end{cases} \quad (32)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{d_{11}}{d} + \frac{1}{2G} \right) , \quad c_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{d_{12}}{d} - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{d_{11}}{d} + \frac{1}{2G} \right) , \quad c_{21} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d_{21}}{d} , \\
c_{22} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{d_{22}}{d} + \frac{1}{2G} \right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{d_{12}}{d} , \quad c_{33} = \frac{b_{33}}{a_{33}} + \frac{1}{2G} , \\
d_{11} &= b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12} , \quad d_{12} = b_{12}a_{22} - b_{22}a_{12} , \quad d_{21} = b_{21}a_{11} - b_{11}a_{21} , \\
d_{22} &= b_{22}a_{11} - b_{12}a_{21} , \quad d = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} , \\
f_{11} &= \sqrt{3/2} , \quad f_{12} = 0 , \quad f_{21} = \sqrt{2}/2 , \quad f_{22} = \sqrt{2} , \quad f_{33} = 1 ,
\end{aligned}$$

G – модуль сдвига.

Решение последней системы имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{11} = G_{1111} \dot{\varepsilon}_{11} + G_{1122} \dot{\varepsilon}_{22} ; \\ \dot{\sigma}_{22} = G_{1122} \dot{\varepsilon}_{11} + G_{2222} \dot{\varepsilon}_{22} ; \\ \dot{\sigma}_{12} = G_{1212} \dot{\varepsilon}_{12} , \end{cases}$$

где G_{ijkl} – компоненты матрицы жесткости упругого тела сравнения. Они вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} G_{1111} &= \frac{f_{11}c_{22} - f_{21}c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}} ; & G_{1122} &= \frac{f_{12}c_{22} - f_{22}c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}} ; \\ G_{2222} &= \frac{f_{22}c_{11} - f_{12}c_{21}}{c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}} ; & G_{1212} &= f_{33}/c_{33} . \end{aligned} \quad (33)$$

Алгоритм реализации вычислений. Задавались компоненты тензора напряжений как функции времени. Скорость движения по траектории нагружения постоянна. Для заданной траектории нагружения в каждый момент времени для всех направлений проверялось условие активности (17). Затем вычислялись величины $G_{\alpha\beta}^{(1)}$ и F_{α} с использованием квадратурных формул Гаусса, причем интегрирование велось по известной уже области активных направлений. При этом изменения интенсивности разрешающих напряжений или деформаций строились в узлах квадратурных формул. Критическая толщина пластинки вычислялась по формуле (11), а входящие в нее компоненты матрицы жесткости упругого тела сравнения G_{ijkl} – по формулам (33).

При расчетах приняты следующие значения постоянных материала:

$$N = 40, \quad \tau_0 = 80 \text{ МПа}, \quad \tau_1 = 0,4 \text{ МПа}, \quad m = 0,6, \quad \nu = 0,5, \quad \dot{a} = 0,007 \text{ ч}^{-1},$$

$$R_1 = 10800 \text{ МПа}, \quad R_2 = R_3 = R_4 = A = 0,$$

$$E = 137000 \text{ МПа}, \quad G = 53000 \text{ МПа}, \quad \sigma_A = 200 \text{ МПа}, \quad \sigma_B = 180 \text{ МПа}.$$

Константы теории выбраны таким образом, чтобы с ее помощью можно было адекватно описать эксперименты на ползучесть при различных напряженных состояниях после предварительной пластической деформации растяжения, приведенные в [8].

Численные результаты. В качестве примера рассмотрим траекторию нагружения в виде двухзвенной ломаной, показанной на рис. 2 (OAB). Движение по данной траектории происходит с постоянной скоростью $\dot{\sigma}_0 = \text{const}$.

На рис. 3 показаны зависимости критической толщины от длины второго звена траектории нагружения, построенные для скорости нагружения $\dot{\sigma}_0 = 4000 \text{ МПа/ч}$. Сплошная линия соответствует сложному нагружению (кривая OAB), а пунктирная – простому (кривая OB). Из рисунка видно,

что критическая толщина пластинки при сложном нагружении меньше, чем при простом.

Зависимости критической толщины от длины второго звена траектории для различных скоростей нагружения представлены на рис. 4. Сплошной линией показана кривая для скорости нагружения $\dot{\sigma}_0 = 4000$ МПа/ч, штрих-пунктирной – для $\dot{\sigma}_0 = 1000$ МПа/ч, пунктирной – для $\dot{\sigma}_0 = 100$ МПа/ч. При увеличении скорости нагружения система становится жестче, поэтому критическая толщина уменьшается.

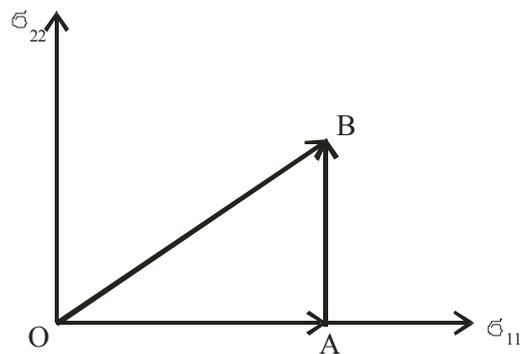


Рис. 2 – Траектория нагружения

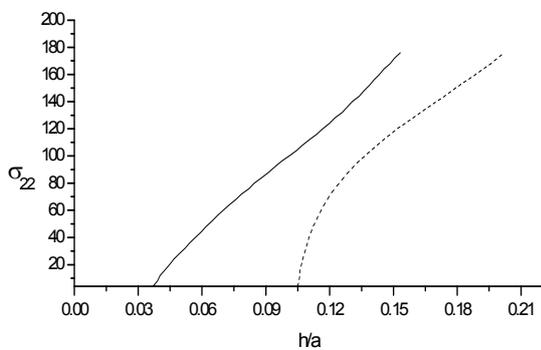


Рис. 3

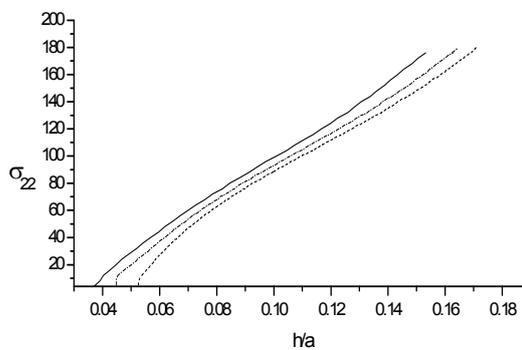


Рис. 4

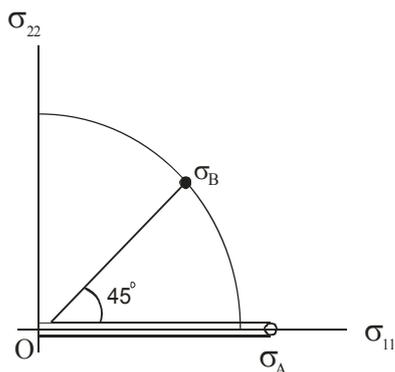


Рис. 5 – Схема нагружения

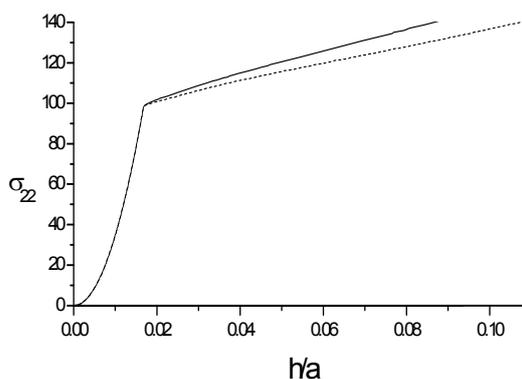


Рис. 6

Пусть теперь нагружение ведется по траектории, показанной на рис. 5. На первом этапе напряжение σ_{11} растет с постоянной скоростью вплоть до значения σ_A , при этом $\sigma_{22} = 0$. Затем идет разгрузка до нуля, после чего оба напряжения σ_{11} и σ_{22} увеличиваются, пока не достигнут значения σ_B . Далее значения напряжений фиксируются. На рис. 6 построены кривые зависимости критической толщины от напряжения σ_{22} . Как и ра-

нее, сплошная кривая иллюстрирует случай сложного нагружения, а пунктирная – соответствующего простого.

В данной работе с использованием определяющих соотношений теории ползучести, учитывающей микронапряжения, впервые исследовано влияние истории нагружения, а также его скорости на критическую толщину вязкопластической пластинки. В качестве критерия устойчивости использовался критерий, основанный на использовании эквивалентной упругой матрицы касательной жесткости, которая зависит как от скорости приложения нагрузки, так и от траектории нагружения.

Показано, что в некоторых случаях критическая толщина пластинки может существенно зависеть от вида траектории нагружения (при сложном нагружении ее значение меньше, чем при простом). Скорость нагружения тоже влияет на эту толщину (при увеличении скорости нагружения критическая толщина становится меньше). На основании полученных результатов делается вывод о том, что при исследовании устойчивости вязкопластических пластин необходимо использовать теории ползучести или вязкопластичности, учитывающие влияние сложного нагружения на ползучесть металлов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища школа, 1986. – 511 с.
2. Черняков Ю.А. Достаточные условия единственности процесса деформирования упругопластического тела // Устойчивость и прочность элементов конструкций. – Днепропетровск, 1988. – С. 65-72.
3. Швайко Н.Ю. Влияние истории нагружения на устойчивость элементов конструкций. – Днепропетровск, 1991. – 168 с.
4. Hill R. A general theory of uniqueness and stability of elastic plastic solids // J. of Mech. Phys. Solids. – 1958. – Vol. 6. – Pp. 236-249.
5. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. – 1958. – Т. 2, №1. – С. 78-89.
6. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В., Черняков Ю.А. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации // ПММ. – 1986. – Т.50, №6. – С. 890-897.
7. Гончаренко А.В., Черняков Ю.А. Бифуркационный критерий в теории устойчивости упруго-вязкопластических тел // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 115-118.
8. Ohashi Y., Kawai M., Momose T. Effects of prior plasticity on subsequent creep of type 316 stainless steel at elevated temperature // Transactions of the ASME. – 1986. – Vol. 108. – Pp. 68-74.